Testy największej wiarygodności

2.1 **Rozkład dwumianowy**

Rzucono n razy monetą.

a) Znajdź estymator największej wiarygodności dla prawdopodobieństwa π wypadnięcia orła, gdy w próbie wypadło k orłów. Skomentuj wartość estymatora, gdy $k = 0$.

b) Skonstruuj test największej wiarygodności dla hipotez $H_0 : \pi = \pi_0$ i $H_1 : \pi \neq \pi_0$

2.2 **Rozkład Hardy'ego-Weinberga**

Genotypy AA, Aa i aa występują z prawdopodobieństwami π_1, π_2, π_3. W próbie wystąpiło n_1, n_2, n_3 genotypów AA, Aa i aa.

a) Znajdź funkcję wiarygodności dla tej próby, zakładając rozkład wielomianowy.

b) Genotypy podlegają prawu Hardy'ego - Weinberga, gdy allele A i a występują niezależnie i prawdopodobieństwo wystąpienia allela A wynosi π. Oblicz przy tym założeniu prawdopodobieństwa wystąpienia genotypów AA, Aa i aa.

c) Znajdź test największej wiarygodności do testowania hipotezy, że genotypy AA, Aa i aa nie podlegają prawu H-W przy hipotezie zerowej, że podlegają temu prawu.

d) Przeprowadź test z pkt c) dla danych $n_1 = 8, n_2 = 47, n_3 = 50$.

2.3 **Test symetrii**

Próba z rozkładu wielomianowego o prawdopodobieństwie $P(X = x_i, Y = y_j) = \pi_{ij}$, $(i, j = 1, 2, ..., I)$ umieszczona jest w tablicy $N = [n_{ij}]$ (n_{ij} jest liczbą obserwacji w próbie takich, że $X = x_i$ oraz takich, że $Y = y_j$).

a) Znajdź test największej wiarygodności do testowania hipotezy

$$H_0 : \quad \pi_{ij} = \pi_{ji}$$

dla wszystkich $i, j = 1, 2, ..., I$.

$$H_1 : \quad \pi_{ij} \neq \pi_{ji}$$

dla pewnych $i, j = 1, 2, ..., I$.

b) Użyj tego testu do testowania symetrii w tablicy danych:

Dane: Porównanie wzrostu 205 par małżeńskich.

	Żona		
Mąż	wysoka	średnia	niska
wysoki	18	28	14
średni	20	51	28
niski	12	25	9

Źródło. Wyniki zebrane przez Galtona, Christensen [59]

Co oznacza hipoteza H_0 dla wzrostu par małżeńskich?